非線形計画法

非線形計画法の基礎と制約なし非線形計画問題

文献：森 雅夫、松井知巳、オペレーションズ・リサーチ、
朝倉書店、2004

7.1 非線形計画問題

$$
\begin{array}{lll}
\min. & f(x) & \\
s.t. & g_i(x) \leq 0, & (i = 1, \ldots, m_1) \\
 & h_j(x) = 0, & (j = 1, \ldots, m_2)
\end{array}
$$

キーワード

目的関数、不等式制約、等式制約、制約式

許容解、許容領域、実行不能、<u>最適解</u>

$x^* \in \Omega, f(x^*) \leq f(x)$を満たすとき$x^*$を最適解という

7.2 凸計画

- キーワード

凸結合、凸集合、凸関数、凸計画、
局所最適解、大域的最適解、開球

定理　問題$\min\{f(x)|x \in \Omega\}$ は凸計画とする。この時、x^*が
$\min\{f(x)|x \in \Omega\}$の局所最適解ならば、大域的最適解である。

7.3 1変数の非線形計画問題

- 閉区間$[L, U]$内の凸関数$f(x)$の最小化問題、 $f(x)$はこの区間で微分可能、 $f'(x)$=0を求める問題に帰着

・2分探索法

・線形補間法

・ニュートン法

7.4 多変数の非線形関数

- キーワード

勾配ベクトル、ヘッセ行列、一次近似関数、最急降下方向、

定理　n変数の2次関数$q(x) = \left(\frac{1}{2}\right) x^T D x + d^T x + d_0$が凸関数となる必要十分条件は、行列$D$が半正定値となっていることである。

定理　n変数の2次関数$q(x) = \left(\frac{1}{2}\right) x^T D x + d^T x + d_0$において、$Dx^* + d = 0$ならば、 $q(x)$はx^*において最小となっている。

7.4 多変数の非線形関数（続）

- キーワード

一次の最適性条件、二次の最適性条件

定理　関数$f: R^n \to R$が1回連続微分可能な凸関数ならば、停留点は$f(x)$の最小化問題の最適解である。

定理　関数$f: R^n \to R$が2回連続微分可能な関数とする。点x^*が$f(x)$の停留点であって、ヘッセ行列$\nabla^2 f(x^*)$が正定値ならば、x^*は$f(x)$の最小化問題の局所最適解である。

7.5 無制約最小化問題の解法

- キーワード

降下法、最急降下法、ニュートン法、準ニュートン法

<u>降下法</u>

Step0 適当なベクトルを初期値x^0とする。$k \coloneqq 0$とする。

Step1 x^kが終了条件$\| \nabla f\left(x^k\right) \| \leq \varepsilon$を満たしている時、 x^kを出力して終了

Step2 探索方向d^kを求める。

Step3 ステップサイズt^kを求める。

Step4 $x^{k+1} = x^k + t^k\ d^k$, $k \coloneqq k + 1$としてStep1へ戻る。