

非線形計画法

制約を持つ非線形計画問題

文献：森 雅夫、松井知巳、オペレーションズ・リサーチ、
朝倉書店、2004

7.6 等式制約下の非線形最小化問題

(1) 線形等式下の凸2次関数最小化問題

$$Q: \min. \quad q(x) = \left(\frac{1}{2}\right) x^T D x + d^T x$$

$$s.t. \quad Ax = b$$

D は対称な半正定値行列

定理 $Ax^* = b, -\nabla q(x^*)^T \equiv -(Dx^* + d)^T = \lambda^{*T} A$ を満たす (x^*, λ^*) が存在すれば、 x^* は Q の最適解である。

λ : ラグランジュ乗数

7.6 等式制約下の非線形最小化問題 (続)

(2) ラグランジュの未定乗数法

$$\begin{aligned} Q': \min. & \quad f(x) \\ \text{s.t.} & \quad h_j(x) = 0, \quad (\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}) \end{aligned}$$

許容解 x^* で目的関数を一次近似

$$\begin{aligned} Q'': \min. & \quad f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*) \\ \text{s.t.} & \quad \nabla h_j(x^*) (x - x^*) = 0, \quad (\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}) \end{aligned}$$

ラグランジュの未定乗数法

$$-\nabla f(x^*)^T = \sum_{j=1}^n \lambda_j \nabla h_j(x^*), \quad h_j(x) = 0, \quad (\forall j \in \{1, 2, \dots, m\})$$

の解を Q' の解とする方法

7.7 不等式制約下の最小化問題

(1) 凸2次計画

$$\begin{aligned} Q: \min. \quad & q(x) = \left(\frac{1}{2}\right) x^T D x + d^T x \\ \text{s.t.} \quad & A x \geq b \\ & D \text{は対称な半正定値行列} \end{aligned}$$

例：ポートフォリオ選択問題、最小包含円問題

$$\begin{aligned} Q(x^*): \min. \quad & q(x^*) + \nabla q(x^*)^T (x - x^*) = (D x^* + d)^T x + q(x^*) - (D x^* + d)^T x^* \\ \text{s.t.} \quad & A x \geq b \end{aligned}$$

定理 問題 $Q(x^*)$ の最適解が x^* ならば、 x^* は問題 Q の最適解である。また逆も成り立つ。

定理 問題 Q の解 x^* に対し、 $(D x^* + d)^T = \lambda^{*T} A x^* \geq b$, $\lambda^* \geq 0$, $\lambda^{*T} (A x^* - b) = 0$ を満たす λ^* が存在するならば、解 x^* は問題 Q の最適解である。

7.7 不等式制約下の最小化問題（続）

(2) カルーシュ・キューン・タッカー条件

$$Q': \min. f(x) \quad s.t. \quad g_i(x) \leq 0, (\forall i \in \{1, 2, \dots, m\})$$

$$Q'': \min. f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*) \\ s.t. \quad g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)^T (x - x^*) \leq 0, (\forall i \in \{1, 2, \dots, m\})$$

カルーシュ・キューン・タッカー条件（KKT条件）

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0, g_i(x^*) = 0, (\forall i \in \{1, 2, \dots, m\})$$

$$\lambda_i \geq 0, \lambda_i g_i(x^*) = 0, (\forall i \in \{1, 2, \dots, m\})$$

相補性条件

7.7 不等式制約下の最小化問題（続）

(3) 不等式制約下の最小化問題の解法

- a. 罰金法
- b. 逐次2次計画法