

練習問題 1

$f(\mathbf{x})$ 、 $g(\mathbf{x})$ が凸関数のとき、 $f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})$ 、 $\max(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}))$ が凸関数であること、 $f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})$ 、 $\min(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}))$ が凸関数とは限らないことを示しなさい。

(略解) $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ とすると、 $f(\mathbf{x})$ 、 $g(\mathbf{x})$ が凸関数だから、

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \\ &\leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)+\lambda g(x_1)+(1-\lambda)g(x_2) \\ &= \lambda (f(x_1)+g(x_1))+(1-\lambda)(f(x_2)+g(x_2)) \\ \max(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})) &= \max(f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2), g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)) \\ &\leq \max(\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2), \lambda g(x_1)+(1-\lambda)g(x_2)) \\ &\leq \lambda \max(f(x_1), g(x_1))+ (1-\lambda)\max(f(x_2), g(x_2)) \end{aligned}$$

$f(x)-g(x)$ 、 $\min(f(x), g(x))$ については反例をあげればよい。