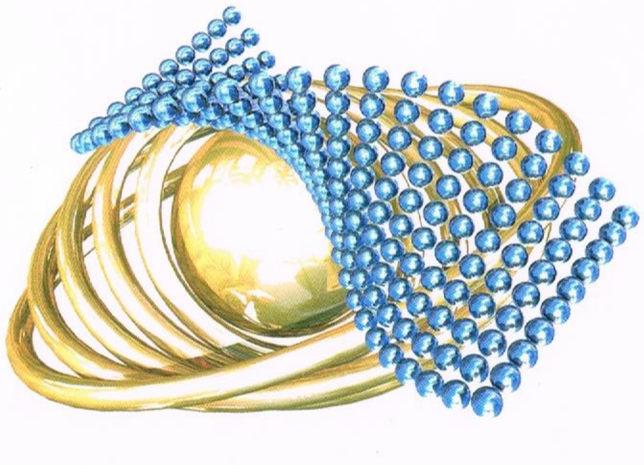
経営と評価のためのOR入門

演習OR

木下栄蔵 Kinoshita Eizo
【編著】

大屋隆生 Ohya Takao
鈴木敦夫 Suzuki Atsuo
杉浦　伸 Sugiura Shin
【著】



日科技連

経営と評価のための
演習OR

ルール 6	AHP

AHP(Analytic Hierarchy Process)は，

1. 解決すべき問題を総合目的・評価基準・代替案に階層化
2. 評価基準の一対比較による重要度の導出，評価基準のもとでの代替案の一対比較による評価値の導出
3. 評価基準の重みと代替案の評価値による総合評価値の導出

により問題を解決する代替案の優先順位を決定する意思決定数理モデルである．

【例題 6-1】

近年，国による補助金の削減，住民税などの税収減少により，地方公共団体において，どのような公共事業を行うかは極めて重要な問題である．

いま，ある都市における公共施設の建設案が3つあげられている．これらについて，「費用性」，「有用性」，「環境性」という評価基準を用いて着工優先順位を決定したい．

【解　説】

上記のルールに示したとおり，**AHP**(Analytic Hierarchy Process)は，解決すべき問題を総合目的・評価基準・代替案に階層化し，評価基準の一対比較による重要度の導出，評価基準のもとでの代替案の一対比較による評価値の導出を行い，最後に評価基準の重みと代替案の評価値による総合評価値による優先度の決定を行う．以下では各節において相対評価法，絶対評価法，内部従属法，外部従属法(ANP)，支配代替案法について，具体的に解説する．

6.1　相対評価法

本節では，最も基本となる AHP における**相対評価法**(Relative Measurement Approach)について説明する．

(1)　階層構造の構築

AHP では，問題解決や意思決定をするにあたり，最初に問題の要素を，

総合目的――**評価基準**――**代替案**
(Goal)　　(Criteria)　(Alternative)

の関係でとらえ，**階層構造**を作り上げることが必要になる．

例題 6-1 であれば，図 6.1 のような階層構造を構築できる．

図 6.1 では，公共施設の着工優先順位の決定を行ううえでの階層図を示している．この階層構造の最上段(レベル 1)は常に 1 つの要素からなる**総合目的**(Goal)を置く．2 段目(レベル 2)以降の要素数は意思決定者が自由に判断することが可能だが，問題解決の把握のしやすさの観点から，できるだけ単純にすることが望ましい．また，図 6.1 においてはレベル 3 までとなっているが，**評価基準**(Criteria)を細分化して上位と下位の関係を構築することも可能である．つまり，有用性の評価基準を上位の評価基準として，下位に「即効性」や「将来性」という階層を追加して，より評価基準の中身を明確化することができる．問題解決のためには，さまざまな状況に応じて良い階層図を構築する必要がある．最後に，最下層には**代替案**(Alternative)を配置し，これで階層構造

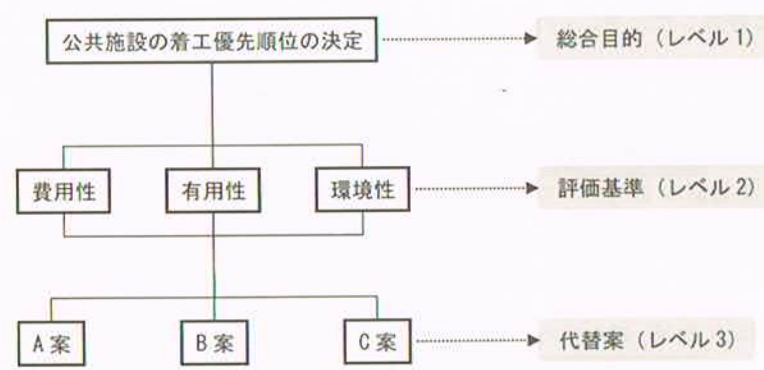


図 6.1　階層構造

は完成となる．

（2）　要素間の一対比較

次に，各階層の要素間でそれぞれ**一対比較**することにより，要素間の重み付けを行う．一対比較とは，ある要素とある要素についてどちらが重要かを判断し，記述する行為である．つまり，総合目的から見た評価基準の一対比較と，評価基準から見た代替案の一対比較を行う（階層構造の種類によっては，評価基準から見た下位評価基準の一対比較も必要である）．

このとき，n を比較要素の数とすると意思決定者は，$n(n-1)/2$ 個の一対比較をする必要がある．

各要素を一対比較するときの**重要性の尺度**は表 6.1 のように表される．

図 6.1 の階層図の総合目的の下にある評価基準である，「費用性」と「有用性」と「環境性」を一対比較したときに，

$$A=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc}\text{費用性} & \text{有用性} & \text{環境性}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{費用性}\\ \text{有用性}\\ \text{環境性}\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1/5 & 1/6 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$$

を得られたとする．まず，**対角要素**がすべて「1」であるのは同じ要素を比較しているからである．次に，例えば「費用性」の方が「環境性」よりかなり重要だと評価したとき，1 行 3 列目には「5」と表す．逆に「環境性」から見て

表 6.1　重要性の尺度と定義

重要性の尺度	定　義
1	同じくらい重要(equal importance)
3	やや重要(weak importance)
5	かなり重要(strong importance)
7	非常に重要(very strong importance)
9	極めて重要(absolute importance)

注）2, 4, 6, 8 は補完的に中間値として用いる．ただし，重要でないときは，逆数を用いる．

「費用性」を評価したときは 1/5 と逆数で表す．そのため，対称関係にある要素は重要さの順序を入れ替えて，問われていることを意味し，その値は逆数となる．最終的に要素の一対比較を行ってできた行列(**一対比較行列**)の**固有ベクトル**が各**要素の重み**となる．

いま，階層内において，n 個の要素を持つ一対比較行列 A の重み W を求めるとする．このとき要素 i の要素に対する重要度を a_{ij} とする．このとき，一対比較行列は，$A=[a_{ij}]$ と表現でき，仮に重み W が既知であるとすると，$A=[a_{ij}]$ は式(6.1)のようになる．

$$A=\begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

ただし，$a_{ij}=w_i/w_j$，$a_{ji}=1/a_{ij}$，重み $W=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$，$i, j=1, 2, \cdots, n$ である．

この場合，すべての i, j, k について $a_{ij}\times a_{jk}=a_{ik}$ が成り立つ．これは，意思決定者の判断が完全に整合性が保たれている状態である．この一対比較行列 A に重みベクトルである W を掛けると，ベクトル $n\cdot W$ が得られる．

これはすなわち，

$$A\cdot W=n\cdot W \tag{6.2}$$

となり，この式は，**固有値問題**として，

$$(A-n\cdot I)\cdot W=0 \tag{6.3}$$

に変形できる．ここで，$W\neq 0$ が成り立つには，n が A の**固有値**になる必要があり，このとき，W は A の**固有ベクトル**となる．さらに，A の階数は 1 であるため，固有値 $\lambda_i (i=1, 2, \cdots, n)$ は 1 つを除いてあとはゼロとなる．また，A の対角要素の和は n である．

ここで，唯一，ゼロでない λ_i は n となり，重みベクトル W は A の**最大固有値**に対する正規化した固有ベクトルとなる．しかし，実際の状況下において

表 6.2　評価基準間の一対比較

	費用性	有用性	環境性	幾何平均	重　み*
費用性	1	1/2	5	$\sqrt[3]{1\times 1/2\times 5}=1.357$	1.357/3.969=0.342
有用性	2	1	6	$\sqrt[3]{2\times 1\times 6}=2.289$	2.289/3.969=0.577
環境性	1/5	1/6	1	$\sqrt[3]{1/5\times 1/6\times 1}=0.323$	0.323/3.969=0.081

＊重みは，幾何平均の合計 3.969 で割り，合計が 1 になるように正規化した．

W は未知であるため，これを実際に得られた一対比較行列 A より求めなければならない．

そこで，A の最大固有値を $\lambda_{\max}$ とすると，式(6.4)となる．

$$A\cdot W=\lambda_{\max}\cdot W \qquad (6.4)$$

式(6.4)を解くことにより，W を求めることができる．つまり，一対比較行列の最大固有値 $\lambda_{\max}$ に対する固有ベクトルが各**評価基準の重み**となる．このようにして評価基準の重みを算出する方法を**固有値法**という．

ただし，実際に AHP を用いて問題解決をする場合，一対比較行列の重みの導出には，行の**幾何平均法**や列の**算術平均法**を用いて重みを導出することもできる．なお，x 個の数値 $a_1, a_2, \cdots, a_x$ についてこれらすべての積の $1/x$ 乗根，すなわち $\sqrt[x]{a_1 a_2\cdots a_x}$ を**幾何平均**という．

表 6.1 の尺度にもとづいて，表 6.2 のような行列を作成し，重みの導出には幾何平均法を用いる．

算術平均法は，一対比較行列の列の合計で，各要素を割り，行の**算術平均**を重みとして用いる方法である．

すなわち，表 6.2 と同様の一対比較行列，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1/5 & 1/6 & 1 \end{bmatrix}$$

の各要素を列の合計列の合計である 3.2(1 列目の和)と 1.667(2 列目の和)と 12(3 列目の和)でそれぞれ割ると，

$$\begin{bmatrix} 1/3.2 & 0.5/1.667 & 5/12 \\ 2/3.2 & 1/1.667 & 6/12 \\ 0.2/3.2 & 0.167/1.667 & 1/12 \end{bmatrix}$$

となり，各行を算術平均すると，1 行目は評価基準の重みとして，

$$(1/3.2+0.5/1.667+5/12)/3=0.343$$

となる．2 行目，3 行目も同様にして，一対比較行列からの評価基準の重みとして(0.343, 0.575, 0.082)が得られる．重みの導出については，要素数 3 までは固有値法，幾何平均法，算術平均法のいずれを用いても一致するが，要素数が 4 を超えると若干異なるが，実用上の問題はない．

さて，表 6.2 では，意思決定者の答えは首尾一貫しているといえる．なぜなら，

（有用性＞費用性＞環境性）

という順位が，重みを見ても各評価を見ても一目瞭然だからである．しかし，実際の意思決定においては状況が複雑になればなるほど，意思決定者の答えが整合しなくなる(首尾一貫性がなくなる)ことが考えられる．

これは，一対比較行列 A が整合しなくなるにつれ，$\lambda_{\max}$ は n より大きくなるということで，式(6.5)に示す **Saaty の定理**より明らかになっている．

$$\lambda_{\max}=n+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(w_j a_{ij}-w_i)^2/w_i w_j a_{ij} n \qquad (6.5)$$

式(6.5)から $\lambda_{\max}\geqq n$ が成り立ち，等号は一対比較行列 A の整合性が完全にとれている時にのみ成立することが確かめられる．

そこで，Saaty は一対比較行列 A における首尾一貫性(**整合性**)の尺度として，**C. I. 値**(Consistency Index：**整合度**)を提唱し，式(6.6)のように定義している．

$$\mathrm{C.I.}=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1} \qquad (6.6)$$

一対比較行列 A には n 個の固有値がありその和は n であることがわかって

いる．完全に整合性が保たれている場合はただ1つの固有値が n となりそれ以外は0となるが，実際の意思決定の場においては，そのような理想的な状態になることは考えにくい．そのため，完全な整合性が保たれない場合は $\lambda_{\max}-n$ を $n-1$ で割ることにより不整合の値が導出され，式(6.6)は固有値の大きさを示す指標とみなすことができる．行列 A が完全な整合性をもつ場合はこのC.I.値は0であり，この値が大きいほど不整合度が大きくなるのである．サティー(Saaty)は，C.I.の値が0.1または0.15以下であれば整合性に問題がないとすることを経験則より提案している．

なお，表6.2におけるC.I.は，式(6.7)のとおりである．

$$\begin{aligned}&\mathrm{C.I.}=(3.065-3)/(3-1)=0.0325\\&(0.0325\leqq 0.15)\end{aligned}\tag{6.7}$$

（3） 代替案の優先順位の決定

前段階で計算された各階層の要素間の重みを用いて，階層全体の重み付けを行う．これによって，階層の最上段である総合目的に対する，各代替案の優先順位が決定される．

各評価基準について，代替案である「A案」，「B案」，「C案」を表6.1の尺度にもとづいて，一対比較を行った結果が以下の表6.3である．

代替案のすぐ上の評価基準の重みを W とし，代替案に直接かかる各評価基準からの各代替案の重みを計算したものを評価行列 M とすると，総合表価値 E は式(6.8)のようになる．

$$E=M\cdot\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{bmatrix}=M\cdot W\tag{6.8}$$

式(6.8)に例題を代入した式が式(6.9)となる．

表6.3　評価基準から見た各代替案の一対比較

費用性	A 案	B 案	C 案	重 み
A 案	1	1/5	5	0.219
B 案	5	1	7	0.715
C 案	1/5	1/7	1	0.067

C.I.=0.092

有用性	A 案	B 案	C 案	重 み
A 案	1	2	2	0.484
B 案	1/2	1	3	0.349
C 案	1/2	1/3	1	0.168

C.I.=0.068

環境性	A 案	B 案	C 案	重 み
A 案	1	3	2	0.540
B 案	1/3	1	1/2	0.163
C 案	1/2	2	1	0.297

C.I.=0.005

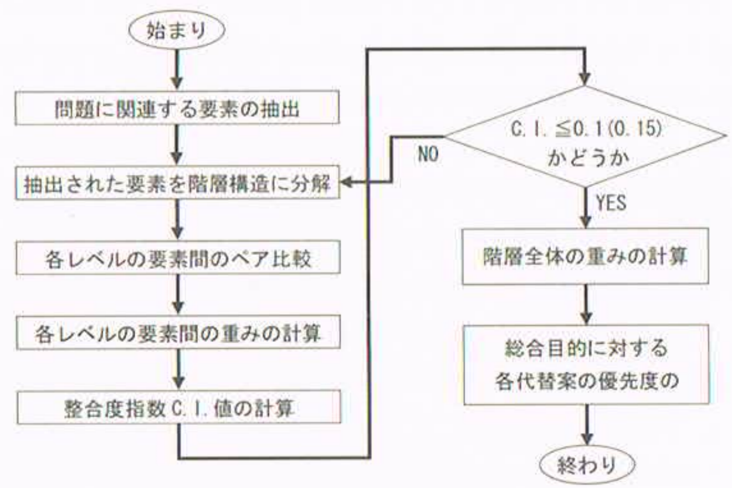


図6.2　AHPのフローチャート

$$E=\begin{bmatrix}0.219 & 0.484 & 0.540\\ 0.715 & 0.349 & 0.163\\ 0.067 & 0.168 & 0.297\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.342\\ 0.577\\ 0.081\end{bmatrix}=\begin{array}{c}A\\ B\\ C\end{array}\begin{bmatrix}0.398\\ 0.459\\ 0.144\end{bmatrix} \tag{6.9}$$

この結果，総合目的に対する各代替案の評価値が導出でき，事業着工の優先順位は，B案，A案，C案の順に決定できる．

AHPを用いる際の上述の流れを図6.2(p.85)に示す．

（4）　相対評価法の特長と問題点

相対評価法の特長は次のとおりである．

- 定量的な分析では扱いきれない構造の問題であったとしても，表6.1に示したような重要性の尺度を用いて一対比較をすることによって，意思決定者の負担を軽くできる．
- 主観的な判断とシステムアプローチを上手に組み合わせることにより，これまでの手法では生かしきれなかった意思決定者自身の，勘や経験を取り入れることができる．
- 複雑な問題を解決するうえでも，階層化によって整理できる．また，部分的な比較や考察を行うだけで評価値を導出することができる．
- 互いに共通の尺度がない問題でも解決が可能である．
- 意思決定者が複数の場合でも，意見をとりまとめながら意思決定ができる．
- 整合性のないデータを用いることができる．さらに，C.I.値によって，修正することも容易にできる．

上記のような特長をもつ一方で，次のような問題点もあるため，注意が必要である．

- AHPの実施後に代替案が追加されたときに，もう一度計算をしなおさなければならない．
- 代替案が追加された場合に，総合評価値の順位が入れ替わる可能性がある．

- 代替案の数が9個を超えるような問題においては，計算処理が困難になる．

このような問題に対処するには，

- 階層内の同一のレベルに置く要素は互いに独立性の高いものを選ぶようにする．
- 一対比較の対象となる要素は，9以下にすること．
- 意思決定者が複数のときは，一対比較の値には，メンバー間の幾何平均の値を用いる．
- 総合評価値に，近似したものが2個以上ある場合は，他の重要度の低い代替案を除いてから再度AHPを実施することも必要となる．

6.2　絶対評価法

前節で説明したように，相対評価法には優れた点がある反面，代替案の数が多くなったときに対応できないといった問題点が存在する．そこでSaatyはこれらの欠点を克服するために，**絶対評価法**(Absolute Measurement Approach)を提唱した．

絶対評価法は，各評価基準の一対比較を行って重みを導出するまでは相対評価法とまったく同じであるが，絶対評価法の最大の特徴は，各評価基準から見た各代替案の一対比較を行わないという点にあり，これにより，相対評価法の問題点が解消できるのである．ところで，絶対評価法では，各評価基準から見た代替案における評価を行わない代わりに，各評価基準に関して**絶対評価水準**を設定して評価を行う．なお，絶対評価水準の設定の際には，評価基準によって評価水準が相違していても，まったく問題はないとされている．

【例題6-2】

例題6-1で考えた図6.1の階層構造の代替案（レベル3)に，「D案」～「J案」を追加した(図6.3)．このとき，あらためて各代替案の優先順位を評価したい．

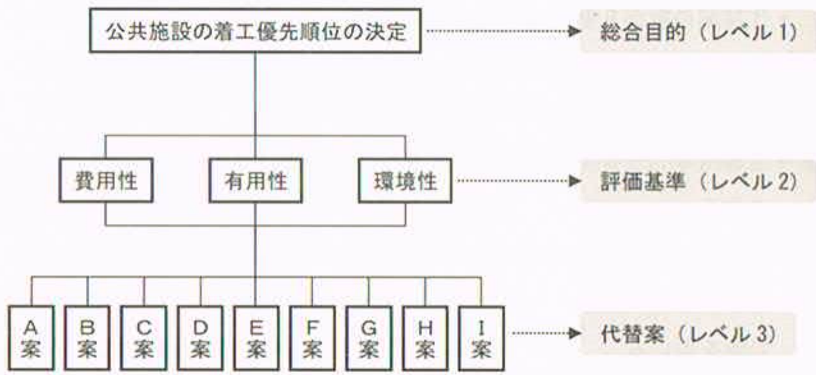


図6.3　意思決定モデルの階層構造(絶対評価法)

【解　説】

絶対評価法の手順として，各評価基準の一対比較により重みを導出するところまでは，相対評価法の手順と同様だということは先に述べたとおりである．ここでは，各評価基準の一対比較により導出された重みを表6.4に示す．

ところで，絶対評価水準は「費用性」は3段階，「有用性」は4段階，「環境性」は2段階とした．これを表6.5に示す．

次に，各絶対評価水準に関して，どのくらい優位で，どのくらい劣位なのかを定量的に計算をしなければならない．そのためには評価基準ごとに絶対評価水準間の一対比較を行い，それぞれの重みを導出する．例えば，「環境性」における「問題がない」は「問題がある」よりどのくらい良いのかを一対比較に

表6.4　各評価基準の重み

	重　み
費用性	0.342
有用性	0.577
環境性	0.081

表6.5　各評価基準の絶対評価水準

費用性	有用性	環境性
かなり余裕	極めてある	問題がない
余　裕	とてもある	問題がある
少し厳しい	少しある	
	あまりない	

表6.6　絶対評価水準間の一対比較

費用性	かなり余裕	余　裕	少し厳しい	重　み
かなり余裕	1	2	4	0.571
余　裕	1/2	1	2	0.286
少し厳しい	1/4	1/2	1	0.143

C.I.=0.027

有用性	極めてある	とてもある	少しある	あまりない	重　み
極めてある	1	2	3	5	0.462
とてもある	1/2	1	2	4	0.294
少しある	1/3	1/2	1	2	0.156
あまりない	1/5	1/4	1/2	1	0.088

C.I.=0.007

環境性	問題がない	問題がある	重　み
問題がない	1	3	0.75
問題がある	1/3	1	0.25

C.I.=0

より重みとして導出するということである．これを表6.6とする．

次に各代替案の評価を表6.5で示した絶対評価水準によって行う．代替案の評価を表6.7とする．

ところで，ある評価基準 i における代替案 j の評価値 a_{ij} を評価基準 i における最大評価値 $a_{i\,\max}$ で割った値を S_{ij} とし，S_{ij} を新たに評価基準 i における代替案 j の評価値としたとき式(6.10)が成り立つ．

$$S_{ij}=\frac{a_{ij}}{a_{i\,\max}} \tag{6.10}$$

最後に，各代替案であるA案〜J案の総合評価値 E_j は，式(6.11)より求められる．

$$E_j=S_{ji}^T\cdot W=S_{ij}\cdot W \tag{6.11}$$

表 6.7　絶対評価水準を用いた各代替案の評価

	費用性	有用性	環境性
A　案	かなり余裕	少しある	問題がない
B　案	かなり余裕	極めてある	問題がある
C　案	少し厳しい	あまりない	問題がある
D　案	余　裕	とてもある	問題がある
E　案	少し厳しい	少しある	問題がある
F　案	少し厳しい	極めてある	問題がある
G　案	余　裕	あまりない	問題がある
H　案	余　裕	とてもある	問題がない
I　案	少し厳しい	少しある	問題がない
J　案	かなり余裕	少しある	問題がある

式(6.11)に，評価値を代入すると，式(6.12)が得られる．

$$E=\begin{bmatrix}0.571/0.571 & 0.156/0.462 & 0.75/0.75\\ 0.571/0.571 & 0.462/0.462 & 0.25/0.75\\ 0.143/0.571 & 0.088/0.462 & 0.25/0.75\\ 0.286/0.571 & 0.294/0.462 & 0.25/0.75\\ 0.143/0.571 & 0.156/0.462 & 0.25/0.75\\ 0.143/0.571 & 0.462/0.462 & 0.25/0.75\\ 0.286/0.571 & 0.088/0.462 & 0.25/0.75\\ 0.286/0.571 & 0.294/0.462 & 0.75/0.75\\ 0.143/0.571 & 0.156/0.462 & 0.75/0.75\\ 0.571/0.571 & 0.156/0.462 & 0.25/0.75\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.342\\ 0.577\\ 0.081\end{bmatrix}=\begin{array}{c}A\\B\\C\\D\\E\\F\\G\\H\\I\\J\end{array}\begin{bmatrix}0.618\\ 0.946\\ 0.223\\ 0.565\\ 0.307\\ 0.690\\ 0.308\\ 0.619\\ 0.361\\ 0.564\end{bmatrix} \tag{6.12}$$

式(6.12)より，A案～J案までの優先順位は，

B案(0.182)＞F案(0.133)＞H案(0.119)＝A案(0.119)

＞D案(0.109)＞J案(0.108)＞I案(0.069)

＞G案(0.059)＝E案(0.059)＞C案(0.043)

と決定できる．ただし，括弧内は式(6.12)により得られた各代替案の重みを

合計1になるように正規化している．

このように，絶対評価水準を用いて代替案の評価を行うことで，相対評価法の問題点を克服できるのである．絶対評価法は以下の特徴がある．

- 代替案の数が多いときに効果を発揮する．
- 絶対評価水準数が多いほど計算の精度が上がる．

6.3　内部従属法

前節までの相対評価法，絶対評価法では，評価や分析をする際に，同一レベル内にある評価基準間や同一レベル内にある代替案間は互いに独立していることを仮定している．しかし，意思決定において，評価基準間や代替案間に従属性がある(各評価基準間が互いに影響し合っている)場合が考えられる．このような状況下における意思決定では，**内部従属法**(Inner Dependence)を用いる．

【例題 6-3】

図6.4は，3つの代替案(都市A, 都市B, 都市C)において，3つの評価基準(交通，財政，文化)を用い，都市の住環境評価を行うために構築した階層構造である．このモデルにおいて，各都市の住環境の評価を行いたい．ただし，評価基準間には，図6.5のような**従属関係**が見られるものとする．

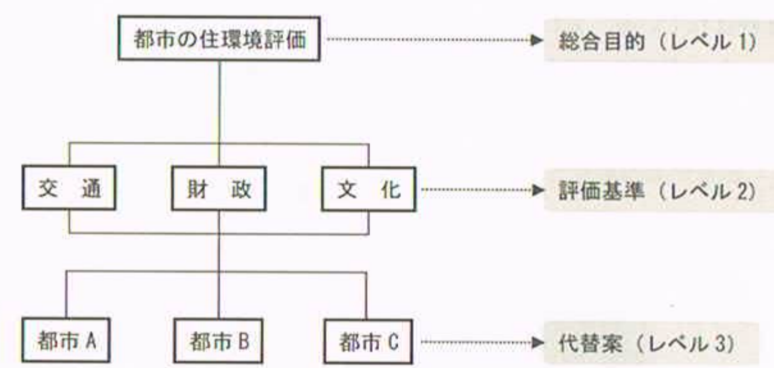


図6.4　意思決定モデルの階層構造(内部従属法)

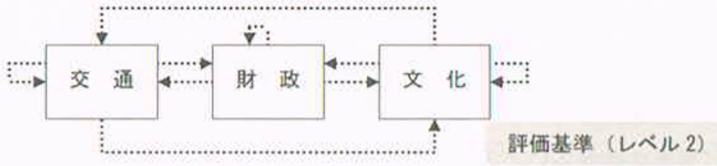


図 6.5 評価基準間の従属関係

【解 説】

図 6.5 に示したように，例えば，「財政」は「財政」だけではなく，「交通」と「文化」からも影響を受けている．具体的な従属状況を仮定するならば，「文化」に魅力がなければ，人々は集まらないため，「財政」は潤わず，「交通」などの社会資本整備も望めない，というような従属状況が考えられる．また，「交通」が不便であれば，「文化」に集まる観光客が望めないという状況や，「財政」が枯渇していれば，「文化」への投資が見込めないという状況も考えられる．

評価基準間の一対比較によって導出された重み(各評価基準が独立であると仮定した場合)を表 6.8 として用い，その重みを W_1 とする．

内部従属法による評価を行うためには，従属し合った要素の影響力の強さを，一対比較によって導出する必要がある．これを表 6.9 に示す．

表 6.9 で導出した重みをまとめたものを表 6.10 とする．なお，これは**従属行列**と呼ばれている．また，その行列を W_2 とする．

次に，各評価基準の**従属性**を考慮した，各評価基準の真の重みを導出しなければならない．**評価基準の真の重み** W_C は，従属行列 W_2 と評価基準間の一対比較によって導出された重み W_1 を掛け合わせることで導出ができる．W_C を式(6.13)に示す．

表 6.8 各評価基準の重み

W_1	重 み
交 通	0.342
財 政	0.577
文 化	0.081

表 6.9 各評価基準間の従属関係の一対比較

交 通	交 通	財 政	文 化	重 み
交 通	1	1/5	3	0.219
財 政	5	1	5	0.715
文 化	1/3	1/5	1	0.067

財 政	交 通	財 政	文 化	重 み
交 通	1	2	2	0.493
財 政	1/2	1	1/2	0.311
文 化	1/2	2	1	0.196

文 化	交 通	財 政	文 化	重 み
交 通	1	2	5	0.582
財 政	1/2	1	3	0.309
文 化	1/5	1/3	1	0.109

表 6.10 従属行列

W_2	交 通	財 政	文 化
交 通	0.219	0.493	0.582
財 政	0.715	0.311	0.309
文 化	0.067	0.196	0.109

$$W_C = W_2 \cdot W_1 = \begin{bmatrix} 0.219 & 0.493 & 0.582 \\ 0.715 & 0.311 & 0.309 \\ 0.067 & 0.196 & 0.109 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.342 \\ 0.547 \\ 0.081 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.401 \\ 0.444 \\ 0.155 \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

式(6.13)より，W_C は従属性が考慮された重みになっている．

表 6.11 評価基準から見た各代替案の一対比較

交 通	A 市	B 市	C 市	重 み
A 市	1	1/5	5	0.219
B 市	5	1	7	0.715
C 市	1/5	1/7	1	0.067

C. I.=0.092

財 政	A 市	B 市	C 市	重 み
A 市	1	2	2	0.484
B 市	1/2	1	3	0.349
C 市	1/2	1/3	1	0.168

C. I.=0.068

文 化	A 市	B 市	C 市	重 み
A 市	1	3	2	0.540
B 市	1/3	1	1/2	0.163
C 市	1/2	2	1	0.297

C. I.=0.005

表 6.12 評価基準から見た各代替案の一対比較により導出された重み

W_A	交 通	財 政	文 化
A 市	0.219	0.484	0.540
B 市	0.715	0.349	0.163
C 市	0.067	0.168	0.297

最後に，従来の AHP と同じように各評価基準から見た各代替案の評価についての一対比較を行う(表 6.11)．また，この重みをまとめたものを表 6.12 とし評価行列を W_A とする．

総合評価値 E は，相対評価法や絶対評価法と同じく，式(6.14)で求められ

る．ただし，内部従属法では従属性が考慮された真の重みを掛け合わせることで導出できる．

$$E = W_A \cdot W_C = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} 0.219 & 0.484 & 0.540 \\ 0.715 & 0.349 & 0.163 \\ 0.067 & 0.168 & 0.297 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.401 \\ 0.444 \\ 0.155 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{bmatrix} 0.386 \\ 0.466 \\ 0.148 \end{bmatrix} \qquad (6.14)$$

式(6.14)より，

B 市(0.466)＞A 市(0.386)＞C 市(0.148)

と優先順位が決定できる．

6.4 外部従属法

前節では，同一レベル内にある評価基準間，または代替案間において従属関係がある場合の意思決定手法である内部従属法について説明した．本節では，階層内の各レベル間において従属関係がある場合の意思決定手法である**外部従属法**(Outer Dependence)について説明する．

外部従属法の最大の特長は，従来の AHP のように各評価基準の重みが，総合目的より一意的に決定されるのではないという点であろう．すなわち，この手法では，各評価基準の重みは代替案ごとに決定され，その重みがそれぞれ異なっていてもよい点に特長がある．社会の複雑化にともない，意思決定の場においても様々な状況が存在することとなり，従来の AHP だけでは対応が困難になった．そこで Saaty は外部従属法と，外部従属法をさらに拡張したモデルである**ANP**(Analytic Network Process)を提案した．ANP は，外部従属

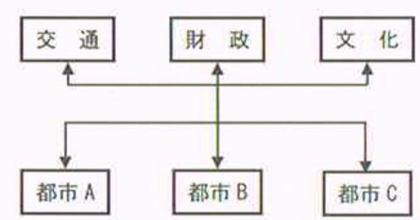


図 6.6 外部従属法(ANP)の関係図

法において評価基準や代替案間のネットワーク構造が複雑になったモデルである．

まず，外部従属法における階層図を図6.6(p. 95)とする．

図6.6は，代替案を評価する際の評価基準が代替案ごとに異なっているということである．例えば，A市を評価する際には交通に大きな重みを置くことや，B市を評価する際には財政に大きな重みを置いたりすることが可能なことを意味している．

【例題6-4】

図6.6の従属関係を考慮した階層図を用いて，「A市」，「B市」，「C市」ごとに評価する際の評価基準の重みが異なることを前提とし，外部従属法を用いて都市の評価を行いたい．

【解　説】

外部従属法では，各代替案によって，評価基準の重みが異なるため，それぞれの代替案においての評価基準の一対比較が必要となる．この一対比較を表6.13に示す．

表6.13より，w_1(A市における評価基準)は式(6.15)となる．

$$w_1{}^T=(0.649, 0.279, 0.072) \tag{6.15}$$

A市においては，「交通」の評価基準に大きな重みを置いていることがわかる．同様に，w_2(B市)とw_3(C市)でも式(6.16)，(6.17)が成り立つ．

$$w_2{}^T=(0.188, 0.731, 0.081) \tag{6.16}$$

$$w_3{}^T=(0.429, 0.429, 0.143) \tag{6.17}$$

それぞれの代替案を評価する際の，評価基準の重みが異なっていることがわかる．

次に，各評価基準からみた代替案の一対比較を行う．ここでの一対比較はこれまでのAHPにおける一対比較とまったく同じである．表6.14に評価基準

表6.13　各代替案における評価基準の一対比較

A 市	交 通	財 政	文 化	重み w_1
交 通	1	3	7	0.649
財 政	1/3	1	5	0.279
文 化	1/7	1/5	1	0.072

C.I.=0.032

B 市	交 通	財 政	文 化	重み w_2
交 通	1	1/5	3	0.188
財 政	3	1	7	0.731
文 化	1/3	1/7	1	0.081

C.I.=0.032

C 市	交 通	財 政	文 化	重み w_3
交 通	1	1	3	0.429
財 政	1	1	3	0.429
文 化	1/3	1/3	1	0.143

C.I.=0.032

のもとでの代替案の一対比較を示す．

表6.14より，各評価基準から見た各代替案の一対比較によって導出された重みw_4〜w_6は，式(6.18)〜(6.20)のとおりとなる．

$$w_4{}^T=(0.219, 0.715, 0.067) \tag{6.18}$$

$$w_5{}^T=(0.484, 0.349, 0.168) \tag{6.19}$$

$$w_6{}^T=(0.540, 0.163, 0.297) \tag{6.20}$$

従来のAHPにおいては，最後に，各代替案の一対比較によって導出された重みと，各評価基準の重みとを掛け合わせることで**総合評価値**を導出した．しかし，外部従属法においては代替案ごとに評価基準の重みが異なるため，従来のAHPにおける総合評価値の導出方法は用いることはできない．

そこで，外部従属法においては**スーパーマトリックス**と呼ばれる超行列を用

表 6.14 評価基準から見た各代替案の一対比較

交 通	A 市	B 市	C 市	重み w_4
A 市	1	1/5	5	0.219
B 市	5	1	7	0.715
C 市	1/5	1/7	1	0.067

C. I.＝0.092

財 政	A 市	B 市	C 市	重み w_5
A 市	1	2	2	0.484
B 市	1/2	1	3	0.349
C 市	1/2	1/3	1	0.168

C. I.＝0.068

文 化	A 市	B 市	C 市	重み w_6
A 市	1	3	2	0.540
B 市	1/3	1	1/2	0.163
C 市	1/2	2	1	0.297

C. I. ＝0.005

いた計算を行う．スーパーマトリックスでは各評価基準と各代替案の関係を1つの行列上に表す．スーパーマトリックスを式(6.21)に示す．

$$E=\begin{array}{c} \\ \text{評価基準} \\ \text{代替案} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc}\text{評価基準} & \text{代替案}\end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & w_C \\ w_A & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.21}$$

式(6.21)は各列の和が1の**推移確率行列** E となり，極限確率行列 E^{*} に収束する．つまり E を何度も掛け合わせることにより累乗が E^{*} へと収束する．E^{*} を式(6.22)に示す．

$$\lim_{k\to\infty} E^{2k+1}=E^{*} \tag{6.22}$$

式(6.21)の w_A が w_A^{*}, w_C は w_C^{*} へ，それぞれ収束し式(6.23)のとおりになる．

$$E^{*}=\begin{array}{c} \\ \text{評価基準} \\ \text{代替案} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc}\text{評価基準} & \text{代替案}\end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & w_C^{*} \\ w_A^{*} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.23}$$

式(6.23)における w_A^{*} は代替案の優先度である総合評価値を，w_C^{*} は収束した各評価基準の重みを示す行列である．

ここで，例題に戻り w_1, w_2, w_3 を w_C としたものを式(6.24)とし，w_4, w_5, w_6 を w_A としたものを式(6.25)とする．

$$w_C=(w_1,w_2,w_3)=\begin{bmatrix} 0.649 & 0.188 & 0.429 \\ 0.279 & 0.731 & 0.429 \\ 0.072 & 0.081 & 0.143 \end{bmatrix} \tag{6.24}$$

$$w_A=(w_4,w_5,w_6)=\begin{bmatrix} 0.219 & 0.484 & 0.540 \\ 0.715 & 0.349 & 0.163 \\ 0.067 & 0.168 & 0.297 \end{bmatrix} \tag{6.25}$$

式(6.24)，(6.25)より，この意思決定の例におけるスーパーマトリックスは式(6.26)のようになる．

$$E=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.649 & 0.188 & 0.429 \\ 0 & 0 & 0 & 0.279 & 0.731 & 0.429 \\ 0 & 0 & 0 & 0.072 & 0.081 & 0.143 \\ 0.219 & 0.484 & 0.540 & 0 & 0 & 0 \\ 0.715 & 0.349 & 0.163 & 0 & 0 & 0 \\ 0.067 & 0.168 & 0.297 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.26}$$

式(6.26)を式(6.22)により収束させると，式(6.27)となり，収束値が得られる．

$$E^{*}=\begin{array}{c} \text{交通} \\ \text{財政} \\ \text{文化} \\ \text{A市} \\ \text{B市} \\ \text{C市} \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.398 & 0.398 & 0.398 \\ 0 & 0 & 0 & 0.516 & 0.516 & 0.516 \\ 0 & 0 & 0 & 0.086 & 0.086 & 0.086 \\ 0.383 & 0.383 & 0.383 & 0 & 0 & 0 \\ 0.479 & 0.479 & 0.479 & 0 & 0 & 0 \\ 0.139 & 0.139 & 0.139 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.27}$$

式(6.27)より，

B 市(0.479)＞A 市(0.383)＞C 市(0.139)

と優先順位が決定できる．また，評価基準の重みについても，交通が(0.398)，財政が(0.516)，文化が(0.086)に収束していることがわかる．

6.5　支配代替案法

本節では，支配代替案法について説明する．

Saaty によって提案された，これまでの AHP は各評価基準の重みを導出する際，総合目的から一意に決定されている．しかし，実際の意思決定の場においては，特定の代替案を念頭において，意思決定者が評価しやすいように評価基準の重みを決めていくアプローチも存在する．つまり，特定の代替案を基準として，基準と他の代替案との比較によって意思決定をしようとする場合もあるということである．このような状況下での意思決定において最も有用的な手法が，**支配代替案法(支配型 AHP)**である．

支配代替案法を提案した木下と中西は，評価基準の重みを規制する機能をもった代替案のことを「**規制代替案**」と呼んでおり，支配代替案法において評価基準の重みは，それぞれの規制代替案によって異なる分布をし，その分布は意思決定者の主観や勘によって選ばれた規制代替案によって，一意的に決定されるものとした．すなわち，意思決定者が決めた規制代替案以外の規制代替案に関する各評価基準の重みは，規制代替案に関する各評価基準の評価に，完全に服従するものであるとしている．このとき，支配力をもつ規制代替案を「**支配代替案**」，支配代替案に服従する規制代替案を「**服従代替案**」と呼び，服従代替案の評価基準の重みは，支配代替案の各評価基準の重みから自動的に導出される．また，支配代替案は各評価基準の重み分布だけでなく，総合評価値までをも支配しており，どの代替案が支配代替案になろうとも，代替案の総合評価値は同一となる．

【例題 6-5】

支配代替案法を説明するために，図 6.4 に示した階層図を用いる．このとき，3つある代替案の中から，「A 市」を支配代替案とし，評価を行いたい．

【解　説】

支配代替案法では最初に，支配代替案(A 市)から見た，各評価基準の一対比較により，重みを導出する必要がある．この一対比較を表 6.15 とする．

表 6.15 より，支配代替案である A 市が規制する各評価基準の重みは，交通(0.582)，財政(0.309)，文化(0.109)となる．

次に，各評価基準から見た各代替案の一対比較を行う．このとき，評価値は支配代替案である A 市を 1 に基準化する．この一対比較を表 6.16 とする．

表 6.16 では，例えば 2 行 1 列の評価基準「交通」から見た「B 市」の評価は，支配代替案である A 市の 0.6 倍であるということを示しており，3 行 3 列の「文化」から見た「C 市」の評価は，支配代替案である A 市の評価に比

表 6.15　支配代替案から見た各評価基準の一対比較

A 市	交 通	財 政	文 化	重 み
交 通	1	2	5	0.582
財 政	1/2	1	3	0.309
文 化	1/5	1/3	1	0.109

C. I.＝0.002

表 6.16　支配代替案と他の代替案との一対比較

	交 通 0.582	財 政 0.309	文 化 0.109	総合評価値 E_1
A 市	1	1	1	1
B 市	0.6	2	1.5	1.130
C 市	0.4	0.5	1.2	0.519

表 6.17　服従代替案(B 市)を基準とした各代替案の評価値

	交通 0.313	財政 0.540	文化 0.147	総合評価値 E_2
A 市	1.667	0.5	0.667	0.890
B 市	1	1	1	1
C 市	0.667	0.25	0.8	0.462

べて 1.2 倍であるということを示している.

また，表 6.16 における，総合評価値 E_1 の導出式は式(6.28)〜(6.30)のとおりである.

$$E_1(\text{A 市})=1\times 0.582+1\times 0.309+1\times 0.109=1 \tag{6.28}$$

$$E_1(\text{B 市})=0.6\times 0.582+2\times 0.309+1.5\times 0.109=1.130 \tag{6.29}$$

$$E_1(\text{C 市})=0.4\times 0.582+0.5\times 0.309+1.2\times 0.109=0.519 \tag{6.30}$$

次に，服従代替案である，「B 市」と「C 市」が規制する評価基準の重みを導出する．このとき，支配代替案である「A 市」から見た評価基準の重みは既知であり式(6.31)に示す.

$$\text{交通(A 市)/財政(A 市)/文化(A 市)}=0.582/0.309/0.109 \tag{6.31}$$

ここで，支配代替案である「A 市」と服従代替案である「B 市」がそれぞれ規制する評価基準の重みの比は，各評価基準から見た「A 市」と「B 市」の比と同一とする．このため，式(6.32)〜(6.34)も既知である.

$$\text{B 市(交通)/A 市(交通)}=0.6/1=x \tag{6.32}$$

$$\text{B 市(財政)/A 市(財政)}=2/1=y \tag{6.33}$$

$$\text{B 市(文化)/A 市(文化)}=1.5/1=z \tag{6.34}$$

すると，式(6.32)〜(6.34)から服従代替案「B 市」の評価基準の重みの比は式(6.35)〜(6.37)のようになる.

$$\text{交通(B 市)}=x\times\text{交通(A 市)}=0.6\times 0.582=0.349 \tag{6.35}$$

$$\text{財政(B 市)}=y\times\text{財政(A 市)}=2\times 0.309=0.602 \tag{6.36}$$

$$\text{文化(B 市)}=z\times\text{文化(A 市)}=1.5\times 0.109=0.164 \tag{6.37}$$

表 6.18　服従代替案(C 市)を基準とした各代替案の評価値

	交通 0.449	財政 0.299	文化 0.252	総合評価値 E_3
A 市	2.5	2	0.833	1.931
B 市	1.5	4	1.25	2.185
C 市	1	1	1	1

式(6.35)〜(6.37)の(0.349, 0.602, 0.164)を和が 1 になるように正規化すると，

$$\text{交通(B 市)，財政(B 市)，文化(B 市)}=0.313,\ 0.540,\ 0.147 \tag{6.38}$$

となり，B 市から見た各評価基準が決定できる.

この評価基準を用いて，各代替案の一対比較を行った結果が，前ページに示した表 6.17 である.

E_2 は式(6.28)〜(6.30)と同様の式で導出ができ，計算結果を式(6.39)〜(6.41)に示す.

$$E_2(\text{A 市})=1.667\times 0.313+0.5\times 0.540+0.667\times 0.147=0.890 \tag{6.39}$$

$$E_2(\text{B 市})=1\times 0.313+1\times 0.540+1\times 0.147=1 \tag{6.40}$$

$$E_2(\text{C 市})=0.667\times 0.313+0.25\times 0.540+0.8\times 0.147=0.462 \tag{6.41}$$

同様に，服従代替案である「C 市」を基準とした評価基準の重みを求めると，

$$\text{交通(C 市)}=x\times\text{交通(A 市)}=0.4\times 0.582=0.233 \tag{6.42}$$

$$\text{財政(C 市)}=y\times\text{財政(A 市)}=0.5\times 0.309=0.155 \tag{6.43}$$

$$\text{文化(C 市)}=z\times\text{文化(A 市)}=1.2\times 0.109=0.131 \tag{6.44}$$

であり，式(6.42)〜(6.44)の(0.233, 0.155, 0.131)を和が 1 になるように正規化すると，

$$\text{交通(C 市)，財政(C 市)，文化(C 市)}=0.449,\ 0.299,\ 0.252 \tag{6.45}$$

となるので，C 市から見た各評価基準が決定できる.

この評価基準を用いて，各代替案の一対比較を行った結果が表 6.18 である.

E_3 も式(6.46)〜(6.48)に示すように，同様に導出できる.

$$E_3(\text{A 市})=2.5\times0.449+2\times0.299+0.833\times0.252=1.931 \tag{6.46}$$

$$E_3(\text{B 市})=1.5\times0.449+4\times0.299+1.25\times0.252=2.185 \tag{6.47}$$

$$E_3(\text{C 市})=1\times0.449+1\times0.299+1\times0.252=1 \tag{6.48}$$

最後に，E_1, E_2, E_3 の総合評価値をそれぞれ正規化すると，

$$E_1{}^T=(1.000,\ 1.130,\ 0.519)\longrightarrow E_1{}^T=(0.378,\ 0.426,\ 0.196)$$

$$E_2{}^T=(0.890,\ 1.000,\ 0.462)\longrightarrow E_2{}^T=(0.378,\ 0.426,\ 0.196)$$

$$E_3{}^T=(1.931,\ 2.185,\ 1.000)\longrightarrow E_3{}^T=(0.378,\ 0.426,\ 0.196)$$

となり，すべての総合評価値において，

B 市(0.426)＞A 市(0.378)＞C 市(0.196)

という順位が付き意思決定が可能となる．

第 6 章の演習問題

【6-1】 AHP における相対評価法，絶対評価法，内部従属法，外部従属法(ANP)，支配代替案法などを用いて，自由に解決したい問題のテーマを決め，問題解決のための代替案の優先度を導出せよ．

第 6 章の参考文献

［1］ 木下栄蔵：『よくわかる AHP　孫子の兵法の戦略モデル』，オーム社，2006 年．
［2］ 木下栄蔵，大屋隆生：『戦略的意思決定手法 AHP』，朝倉書店，2007 年．
［3］ 木下栄蔵編著：『AHP の理論と実際』，日科技連出版社，2000 年．

第 7 章

D E A