システム工学　動的計画法　資料

最適性の原理と最適方程式
動的計画法の考え方の基礎を学ぶ
１）最適性の原理
２）例題（行列の積の計算）
３）最適方程式

１）最適性の原理
「最適方策は、最初の状態および最初の決定がどうであったかにせよ、残りの決定は最初の決定の結果生じた状態に対して、最適方策になっていなければならない」
<例題で詳しく説明します>

２）例題（行列の積の計算）
３つの行列 A_1、A_2、A_3 の大きさがそれぞれ、10×100、100×5、5×50 のとき、$A_1A_2A_3$ を計算する。計算の順序によって、積和演算の回数がことなるので、最小の積和演算の回数で求める順序を決定したい。例えば、$(A_1A_2)A_3$ と計算すると、10×100×5＋10×5×50＝7500 回の積和演算で計算できる。他の順序で計算する場合も、積和演算の回数を計算してみること。

３）最適方程式
例題に対して、最適性の原理を適用した方程式は以下のようになる。

$$m[i,j]: A_i \cdots A_j \text{を計算するのに必要な積和演算の最小回数}$$
$$A_i \text{の大きさを} p_{i-1} \times p_i \text{とする}$$

最適方程式

$$m[i,j] = \begin{cases} 0 & (i=j) \\ \min_{i \le k < j} \{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_kp_j & (i<j) \end{cases}$$

例題の解
$m[1,1]$=$m[2,2]$=$m[3,3]$=0, $m[1,2]$=5000, $m[2,3]$=25000 から、
$m[1,3]$=min{$m[1,1]$+$m[2,3]$+50000, $m[1,2]$+$m[3,3]$+2500}=min{75000,7500}=7500
従って、$(A_1A_2)A_3$　の順序が最適。
より多くの行列の積の順序を決めるには、以下のような表を作成するのが良い。

p_0=10	m[1,1]	m[1,2]	m[1,3]
	p_1=100	m[2,2]	m[2,3]
		p_2=5	m[3,3]
			p_3=50

p_0=10	0	10×100×5 ＝5000	min{25000+50000, 5000+2500}=7500
	p_1=100	0	100×5×50 ＝25000
		p_2=5	0
			p_3=50