システム工学　演習問題

１．（動的計画法１）

４つの行列 A_1、A_2、A_3、A_4 の大きさがそれぞれ、10×100、100×5、5×50、50×15 のとき、行列の積 $A_1A_2A_3A_4$ を計算する。最小の積和演算の回数で求める順序を求めたい。

１） 最適方程式を求めなさい。

２） 最適方程式を解いて、最適な順序を求めなさい。

（略解）

１）$m[i,j]$: $A_i \cdots A_j$を計算するのに必要な積和演算の最小回数

（A_iの大きさを$p_{i-1} \times p_i$とする）とすると、最適方程式は、

$$m[i,j] = \begin{cases} 0 (i = j) \\ \min_{i \le k < j} \{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_k p_j \ \ (i < j) \end{cases}$$

２） $m[1,1]=m[2,2]=m[3,3]=m[4,4]=0$, $m[1,2]=5000$, $m[2,3]=25000$, $m[3,4]=3750$ から始めて、以下のような表によって、$m[1,4]$を求める。

$p_0=10$	$m[1,1]$	$m[1,2]$	$m[1,3]$	$m[1,4]$
	$p_1=100$	$m[2,2]$	$m[2,3]$	$m[2,4]$
		$p_2=5$	$m[3,3]$	$m[3,4]$
			$p_3=50$	$m[4,4]$
				$p_4=50$

2.（動的計画法2）

商店の棚に3つの商品を陳列するとき、以下のようなフェース数による利益が与えられている。4 フェースを最適に並べる方法を求めたい。並べ方によって利益が変わることは、例えば、商品1，2，3をそれぞれ、1，2，1フェース並べると、利益は、7.6、2，1，1フェース並べると、8.3 となることからわかる。最適な並べ方を動的計画法を用いて求めたい。このとき以下の問に答えなさい。

		フェース 数		
		$x=1$	$x=2$	$x=3$
利益	$g_1(x)$	2	4	4．5
	$g_2(x)$	1．3	2．6	2．7
	$g_3(x)$	3	3．5	3．6

1）$f_k(s_k)$ を k 番目の商品までをフェース数 s_k だけ使って陳列したときの最大の売り上げとして，この問題の最適方程式を求めなさい。
2）$f_2(3)$ を求めなさい。
3）$f_3(4)$ を求め，最適な並べ方を示しなさい。

（略解）

1）最適方程式は、

$$f_k(s_k) = \max_{0 \le l \le s_k} (f_{k-1}(l) + f_k(s_k\text{-}l))$$

2), 3)はこれを用いて計算

３．（待ち行列１）
待ち行列理論におけるリトルの公式は以下のように与えられる。この公式について，以下の問に答えなさい。

$$W_q = L_q / \lambda$$
$$L = L_q \quad + \quad \lambda / \mu$$
$$W \quad = L / \lambda$$

ただし，L, は，系内にいる顧客の平均人数，L_q はサービスを待っている顧客の平均人数，W は系内に顧客が滞在する平均待ち時間，W_q はサービスを受けるまでの平均待ち時間，λ は顧客の平均到着率，μ は平均サービス率をあらわす。
1）リトルの公式が成立するための仮定は，系が平衡状態であることである。もし，系が平衡状態でないとどのようなことが起きてリトルの公式が成立しなくなるか，考えられることを述べよ。
2）A さんが病院に行ったところ，この病院の待合室に 10 人の患者が診察を待っていた。A さんは自分が到着後 5 分間にさらに2人の患者が新たに到着したことを観測した。このことから λ を推定し，リトルの公式を用いて A さんが病院に到着してから診察を受けるまでの待ち時間を推定しなさい。
3）実際には，2で見積もった待ち時間よりも短い時間で診察を受けることができた。その理由として考えられることを1と関連付けて述べなさい。
4）リトルの公式を証明しなさい。
5）銀行の窓口，JR のみどりの窓口などで待ち行列を 1 列にする方式（いわゆるフォーク型）が取られている。この方式を適用することで効果があがると考えられるものを 1 つ挙げてそれについて考察しなさい。

（略解）省略

４．（待ち行列２）

$M/M/2(2)$（系内人数が2まで）の待ち行列について，以下の問に答えなさい。ただし，λ は顧客の平均到着率，μ は平均サービス率をあらわす。

1）この待ち行列の状態遷移図を描きなさい。

2）系内人数を n, 系内人数が n である確率をこの待ち行列について P_n, n=0,1,2 として，状態方程式を示しなさい。

3）状態方程式を解いて P_nをそれぞれ求めなさい。

4）平均系内人数を求めなさい。

5）リトルの公式を用いて、平均系内滞在時間を求めなさい。

6）一様乱数を用いて指数分布に従う乱数を発生させる方法について述べなさい。

（略解）

1）省略

2）状態方程式と確率の公式により、

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$
$$\lambda P_0 + 2\mu P_2 = (\lambda + \mu) P_1$$
$$P_0 + P_1 + P_2 = 1$$

3),4),5),6)省略