

線形計画法の解法—シンプレックス法の基礎

シンプレックス法の考え方の基礎を学ぶ

- 1) シンプレックス法の考え方
- 2) シンプレックス表
- 3) グラフを用いた解法
- 4) EXCEL のソルバーで解を求める

1) の詳細

練習問題 1

ある塗料会社は、2 種類のペンキ P1、P2 を製造している。これらのペンキを製造するためには 2 種類の原料 M1、M2 が必要である。P1、P2、1 k g を製造するために必要な M1、M2 の量は以下の表のようである。M1、M2 の 1 日の入手可能量も以下の表に与えられている。P1、P2 のそれぞれの 1 k g あたりの利潤は 5 万円、4 万円だという。利潤が最大になるような生産計画を求めるモデルを作成しなさい。

	P1	P2	利用可能量
M1	6	4	24
M2	1	2	6
利潤	5	4	

定式化

$$\begin{aligned} & \text{Max. } 5x_1 + 4x_2 \\ & \text{s.t. } 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ & \quad x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

シンプレックス法の手順

- 1 標準形への変換 (スラック変数の導入)
- 2 初期解の設定
- 3 基底解と非基底解
- 4 非基底解を変化させることで解を改善
- 5 停止条件

2) の詳細

シンプレックス表 1) を表の形にまとめたもの

3) の詳細

定式化した問題は2変数の最適化問題 ⇒ グラフを用いて解ける  
シンプレックス法の反復途中の解がグラフ上のどの点にあたるか考える。

1) の詳細

1 標準形への変換 (スラック変数の導入)

$$\max \quad 5x_1 + 4x_2 \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \quad (2)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \quad (3)$$

$$x_1, \dots, x_4 \geq 0$$

2 初期解の設定

1 から、 $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 24, x_4 = 6$  が条件を満たす事がわかる。

3  $x_1, x_2$ : 非基底解,  $x_3, x_4$ : 基底解 と呼ぶ。非基底解: (1) で係数が0でない。(2)、(3) の両方の係数が0でない。基底解: (1) で係数0、(2)、(3) ではどちらか一方のみで係数1。

4 非基底解を変化させることで解を改善 (シンプレックス法は徐々に解を改善する反復法)

1 回目の反復:  $x_2 = 0$  としたまま  $x_1$  を増加させる。どこまで増加できるかを1の条件から求める。

(2) から、

$$x_3 = 24 - 6x_1 - 4x_2 \geq 0 \implies x_1 \leq 4$$

(3) から

$$x_4 = 6 - x_1 - 2x_2 \geq 0 \implies x_1 \leq 6$$

これから  $x_1$  を4まで増加できることがわかる。その他の変数は、(2)、(3) に  $x_1 = 4, x_2 = 0$  を代入することで計算できて、 $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 2$ 。目的関数の値は20。新しい解では、基底解と非基底解が変化して、 $x_2, x_3$ : 非基底解,  $x_1, x_4$ : 基底解となる。それに合わせて、(1)、(2)、(3) を次の反復のために変形する。(2) から、

$$x_1 = \frac{1}{6}(24 - 4x_2 - x_3)$$

これを(1)、(3)に代入して、整理し、さらに、上式を整理すると、

$$\max \quad \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{6}x_3 + 20 \quad (4)$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 4 \quad (5)$$

$$\frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_3 + x_4 = 2 \quad (6)$$

$$x_1, \dots, x_4 \geq 0$$

2回目の反復:  $x_3 = 0$ としたまま $x_2$ を増加

$x_3$ を増加すると目的関数は減少してしまうことに注意。

1回目と同様に、 $x_2$ をどこまで増加できるかを求める。(5)、(6)から

$$x_1 = 4 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_3 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 6$$

$$x_4 = 2 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_3 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq \frac{3}{2}$$

これから、 $x_2$ は $3/2$ まで増加できることがわかる。1回目の反復と同様に解を計算する

と、 $x_1 = 3, x_2 = 3/2, x_3 = 0, x_4 = 0$ 、目的関数の値は、21。1回目の反復と同様に、

(4)、(5)、(6)を変形すると、

$$\max \quad -\frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + 21 \quad (7)$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 3 \quad (8)$$

$$x_2 - \frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{4}x_4 = \frac{3}{2} \quad (9)$$

$$x_1, \dots, x_4 \geq 0$$

## 5 停止条件

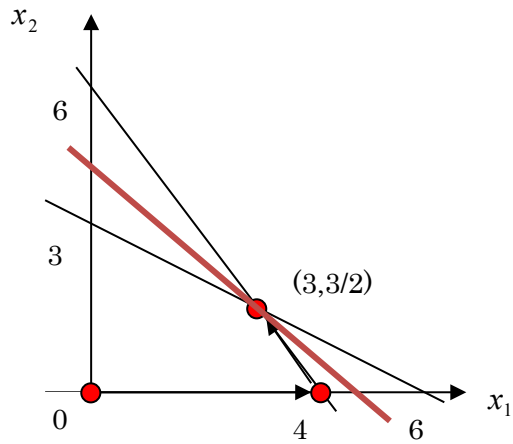
目的関数(7)の係数がすべて負なので、非基底変数を増加させて目的関数を増加させることはできない。反復を停止する。

2)の詳細

ピボット

基底変数	z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>			
	1	-5	-4	0	0	0		(1)
x <sub>3</sub>	0	6	4	1	0	24	24 ÷ 6 = 4	(2)
x <sub>4</sub>	0	1	2	0	1	6	6 ÷ 1 = 6	(3)
	1	0	-2/3	5/6	0	20		(4): (1)+(5) × 5
x <sub>1</sub>	0	1	2/3	1/6	0	4	4 ÷ 2/3 = 6	(5): (2) ÷ 6
x <sub>4</sub>	0	0	4/3	-1/6	1	2	2 ÷ 4/3 = 3/2	(6): (3) - (5)
	1	0	0	3/4	1/2	21		(7): (4)+(9) × 2/3
x <sub>1</sub>	0	1	0	1/4	-1/2	3		(8): (5)-(9) × 2/3
x <sub>2</sub>	0	0	1	-1/8	3/4	3/2		(9): (6) ÷ 4/3

3) の詳細



4) の詳細

以下のような EXCEL の表を作成しなさい。

The screenshot shows the Microsoft Excel interface. The formula bar displays  $=SUMPRODUCT(B5:C5,B6:)$ . The table below is the data for the linear programming problem.

	A	B	C	D	E
1	練習問題1				
2		P1	P2	利用可能量	使用量
3	M1	6	4	24	0
4	M2	1	2	6	0
5	利潤	5	4		
6	生産量	0	0		
7	総利益	0			
8					

各セルには、以下のような数式が入っている。定式化した問題との対応を考えなさい。

練習問題1 [互換モード] - Microsoft...

ホーム 挿入 ページレイアウト 数式 データ ツール 校閲 表示 開発 ツール アクティブX 制御

貼り付け フォント 配置 数値 スタイル セル 編集

RAND X ✓ fx =SUMPRODUCT(B3:C3,

	A	B	C	D	E
1	練習問題1				
2		P1	P2	利用可能量	使用量
3	M1	6	4	24	=
4	M2	1	2	6	SUMPRODUCT(
5	利潤	5	4		B3:C3,B\$6:C\$6)
6	生産量	0	0		
7	総利益	0			
8					

Sheet1 Sheet2 Sheet3

編集 100%

練習問題1 [互換モード] - Microsoft...

ホーム 挿入 ページレイアウト 数式 データ ツール 校閲 表示 開発 ツール アクティブX 制御

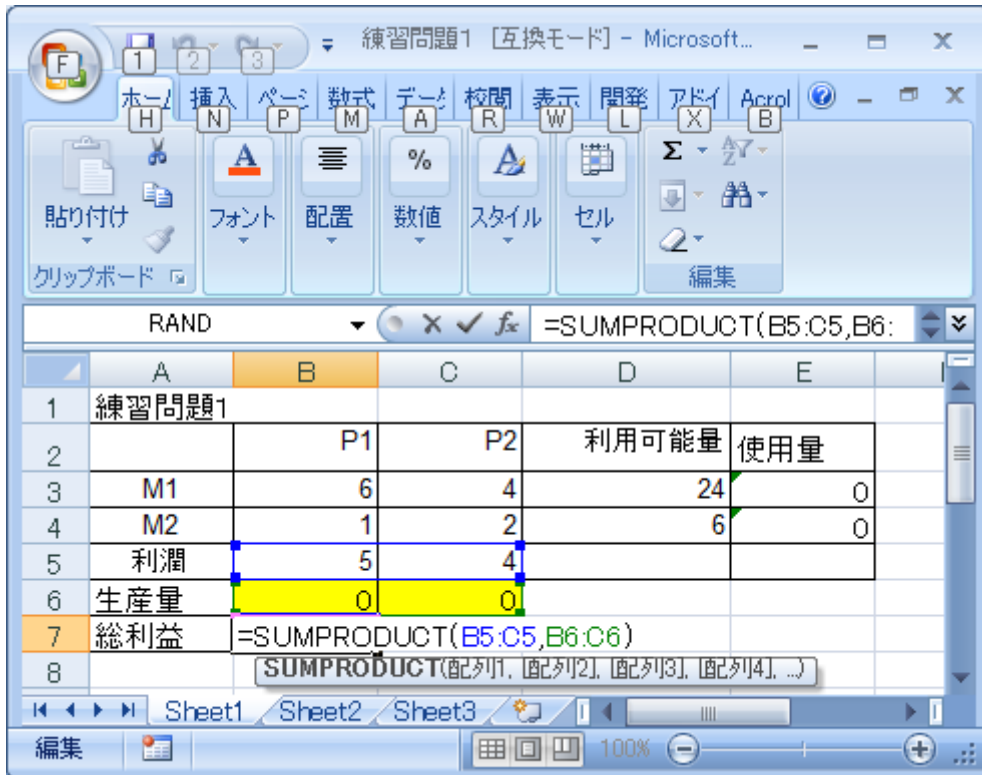
貼り付け フォント 配置 数値 スタイル セル 編集

RAND X ✓ fx =SUMPRODUCT(B4:C4,

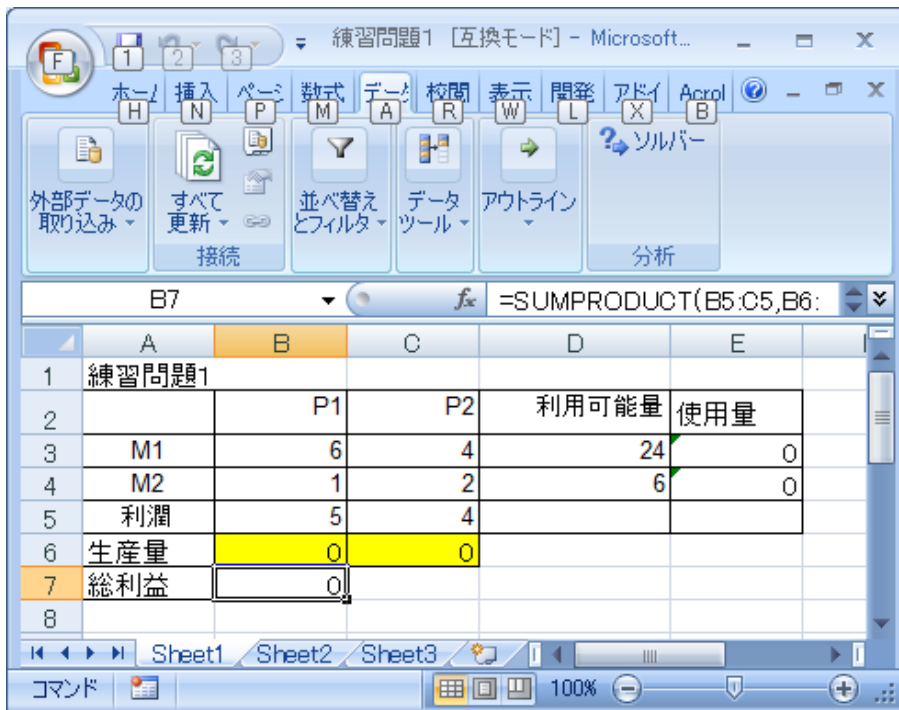
	A	B	C	D	E
1	練習問題1				
2		P1	P2	利用可能量	使用量
3	M1	6	4	24	0
4	M2	1	2	6	=
5	利潤	5	4		SUMPRODUCT(
6	生産量	0	0		B4:C4,B\$6:C\$6)
7	総利益	0			
8					

Sheet1 Sheet2 Sheet3

編集 100%



このあと、ソルバーを起動。



ソルバー: パラメータ設定

目的セル(E):

目標値:  最大値(M)  最小値(N)  値(V):

変化させるセル(B):

制約条件(L):

ソルバー: オプション設定

制限時間(T):  秒

反復回数(I):

精度(P):

公差(E):  %

収束(V):

線形モデルで計算(M)  単位の自動設定(U)

非負数を仮定する(G)  反復結果の表示(B)

近似方法:  一次式(A)  二次式(Q)

微分係数:  前進(F)  中央(O)

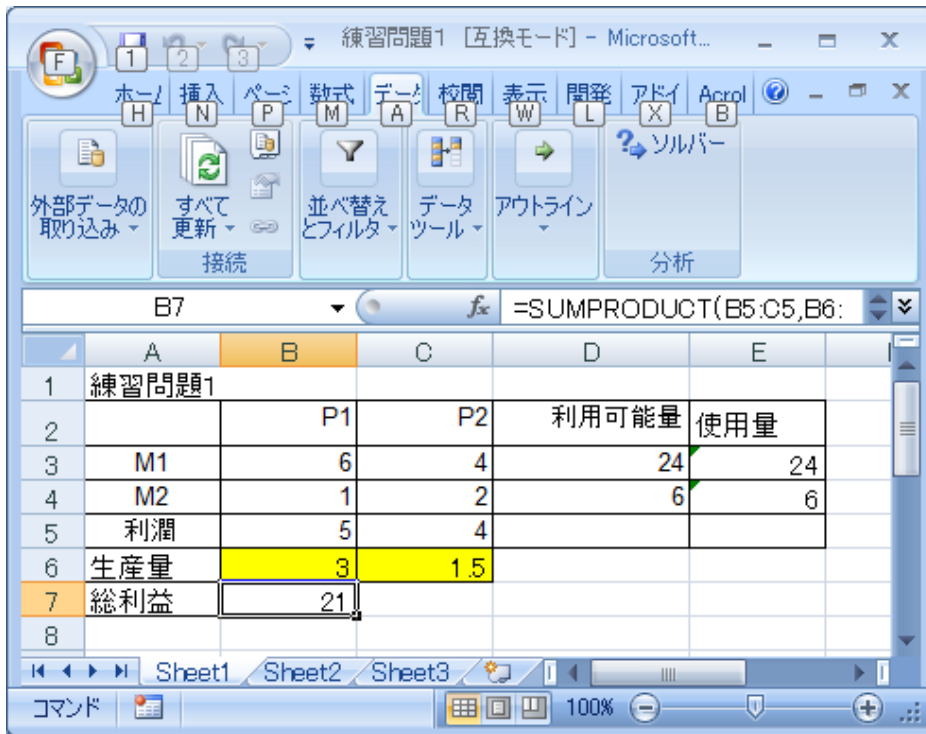
探索方法:  準ニュートン法(N)  共役傾斜法(O)

ソルバー: 探索結果

最適解が見つかりました。制約条件はすべて満たされました。

レポート(R):

解を記入する(K)  元の値に戻す(O)



### 練習問題 1

ある企業では4種類の製品を2つの機械で製造している。いずれの製品も機械1，2の両方を使わなくてはならず、その必要使用時間、機械の時間当たりの使用コスト、使用可能時間は以下の表で与えられている。また、製品1，2，3，4の単位当たり利益も以下の表で与えられている。このとき、総利益を最大にするような生産計画を求めたい。

機械	使用コスト	必要使用時間				使用可能時間
		製品 1	製品 2	製品 3	製品 4	
1	10	2	3	4	2	500
2	5	3	2	1	2	380
利益		75	70	55	45	

- 1) 問題を定式化しなさい。
- 2) スラック変数を導入して等式制約の問題に変形し、シンプレックス表を利用して解を求めなさい。
- 3) エクセルのソルバーを用いて解を求めなさい。



## 練習問題 2

あるプロジェクトチームは 5 つのタスクを持つプロジェクトに取り組んでいる。チームの 3 人のメンバーにはそれぞれのタスクに対して得意・不得意があり、プロジェクトリーダーは 5 点法でそれを以下の表のように評価している。メンバーは 2 つのタスクまで実行することができる。チームのパフォーマンスを最大にするにはリーダーはどのメンバーにどのタスクを割り振ればよいか考えたい。

	タスク 1	2	3	4	5
メンバー 1	1	2	5	4	3
2	3	3	5	5	4
3	5	4	2	3	1

- 1) 問題を定式化しなさい。
- 2) エクセルのソルバーで解を求めなさい。