システム工学　モデリングとシミュレーション

今日の目標：シミュレーション---リトルの公式、M/M/1

概要　（ORWiki より）

対象とするシステムのモデル(model)を構築し，モデルの操作によってシステムの挙動を再現しようとすること．モデルの違いによって,(1)待ち行列タイプのモデルを扱い,その混雑現象に着目して，待ち時間やスループットに関する性能を評価する離散型シミュレーション,(2)物理システムなど微分方程式モデルで規定されるシステムの動的挙動を再現する連続型シミュレーション，(3)その他，に分類できる.多数のソフトウェアが開発・提供・利用されている.

待ち行列タイプのシミュレーション

ケンドールの記号

到着分布/サービス時間分布/窓口数（系内人数の上限）

例　M/M/1(∞)

到着分布：ポアッソン分布

サービス時間分布：指数分布　　(M はマルコフの M)

窓口数：１

系内人数の上限なし

待ち行列の基本：ここでは、このモデルを中心に解説する。

記号の定義

λ ：顧客の平均到着率

μ ：平均サービス率

$\rho=\lambda/\mu$ ：利用率（ <1）

n：系内人数

P_n ：系内人数が n である確率

L：系内にいる顧客の平均人数

L_Q：待ち行列内にいる顧客の平均人数

W：系内に顧客が滞在する平均待ち時間

W_Q：系内に顧客が滞在する平均待ち時間

［リトルの公式］

システムが<u>平衡状態</u>にあるとき、

$$L=\lambda W$$

[リトルの公式の略証]

$A(t)$: 時刻 t までに到着した顧客数（累積）

$D(t)$: 時刻 t までにサービスを受けた顧客数（累積）

$S(t)$: $A(t)$-$D(t)$を t まで積分したもの

とすると，平均滞在時間 $W(t)$は

$$W(t)=S(t)/A(t)$$

平均系内人数 $L(t)$は

$$L(t)=S(t)/t$$

とあらわされる。平均到着率は

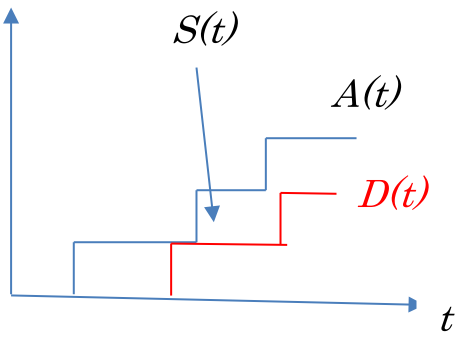
$$\lambda=A(t)/t$$

であるので，

$$L(t)=S(t)/t=(A(t)/t)\cdot(S(t)/A(t))=\lambda W(t)$$

系が平衡状態なので，tによらず上の関係がなりたつ。したがって，

$$L=\lambda W$$



<u>例題</u>

1. Aさんが病院に行ったところ，この病院の待合室に 10 人の患者が待っていた. Aさんは自分が到着後 5 分間に 2 人の患者が新たに到着したことを観測した. このことからλを推定し，リトルの公式を用いて A さんが病院に到着してから診察を受けるまでの待ち時間を見積もりなさい.
2. 実際には，2で見積もった待ち時間よりも短い時間で診察を受けることができた. その理由として考えられることを2と関連付けて述べなさい.

[M/M/1の待ち行列]

顧客の到着：ポアッソン分布

顧客へのサービス時間：指数分布

窓口：１

（待ち行列の上限なし）

ポアッソン分布の確率関数 $p(x) = \dfrac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}$

指数分布の密度関数 $f(x) = \mu\mathrm{e}^{-\mu x}$

[定理]顧客の到着が平均λのポアッソン分布に従うとき、到着時間間隔は平均$1/\lambda$の指数分布に従う。

[証明] 時刻０から t までに間に１人も顧客が到着しない確率は、

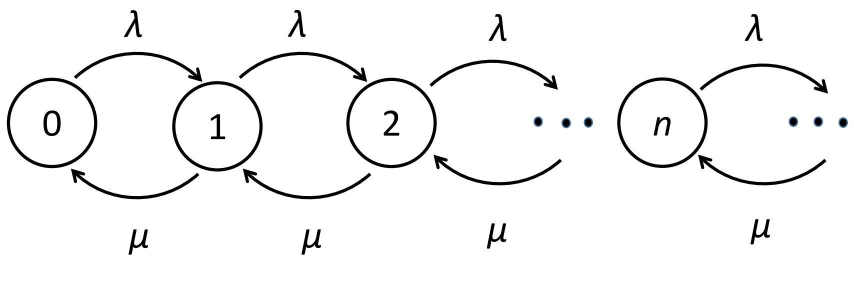
$$\Pr\{T > t\} = 1 - \Pr\{T \leq t\} = \frac{(\lambda t)^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

$$\Pr\{T \leq t\} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

これは、到着時間間隔の分布関数になっているから、到着時間間隔は平均$1/\lambda$の指数分布になっている。密度関数は、$f(x) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$となる。

[状態遷移図]

M/M/1（∞）の待ち行列　の状態遷移図



[定常確率の求め方]

状態 i の定常確率を P_i とすると、以下の漸化式が成立する。

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

$$\lambda P_{i-1} + \mu P_{i+1} = (\lambda + \mu)P_i,\ i = 1,2,\ldots$$

また、P_i は確率だから、

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$$

漸化式を解いて、P_i を P_0 であらわすと、

$$P_i = \rho^i P_0,$$

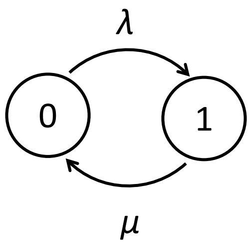
ただし、$\rho = \lambda/\mu$。さらに、和が１であることを用いて P_0を求めると、

$$P_0 = (1-\rho)\rho^i$$

例題１

M/M/1（1）の待ち行列の状態遷移図と定常確率を求めなさい。

状態遷移図は、



定常確率は、

状態０，１の定常確率をそれぞれ P_0，P_1とすると、以下の式が成立する。

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

また、P_0, P_1は確率だから、

$$P_0 + P_1 = 1$$

これらの式を解くと、

$$P_1 = \frac{\rho}{1+\rho}, P_0 = \frac{1}{1+\rho}$$

ただし、$\rho = \lambda/\mu$。

<u>呼損率</u>は、系に入ろうとしても入れない確率。この場合は P_1。

例題２

M/M/2(2)の待ち行列について以下の問に答えなさい．ただし，λ は顧客の平均到着率，μ は平均サービス率をあらわす．

1．この待ち行列の状態遷移図を描きなさい．

2．系内人数を n，系内人数が n である確率を P_n（n=0,1,2）として，状態方程式を示しなさい．

3．状態方程式を解いて P_n（n =0,1,2）を求めなさい．P_n（n =0,1,2）は窓口の利用率 $\rho = \lambda / \mu$ であらわすこと．

4．顧客が到着して待ち時間なくサービスが受けられるのはどのようなときか．簡単に説明してその確率を ρ であらわしなさい．

5．平均系内人数 L を ρ であらわしなさい．リトルの公式を用いて，平均系内滞在時間 Wを求めなさい．

6．ある事務所では，電話回線を 2 本契約し，同じ番号で電話を受けられるようにしている．顧客からの電話の平均到着率を0．1回／分，平均の通話時間を 15 分として呼損率を求めなさい．答えを求める過程もわかるように解答すること．